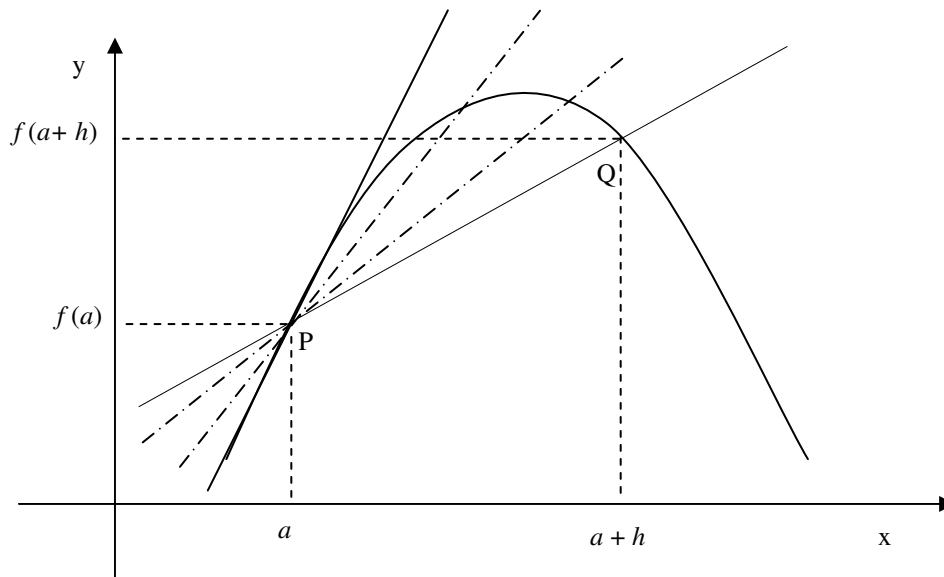


CÁLCULO DIFERENCIAL

Conceito de derivada. Interpretação geométrica

A noção fundamental do Cálculo Diferencial – a derivada – parece ter sido pela primeira vez explicitada no século XVII, pelo matemático francês Pierre de Fermat.



Considere-se uma função f e sejam P e Q dois pontos da curva de coordenadas $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$. O declive da recta que passa por esses dois pontos é dado por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Define-se tangente a uma curva f num ponto $(a, f(a))$ como a recta cujo declive é o $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

A $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ chama-se **razão incremental**.

Definição:

Seja f uma f. r. v. r.. Chama-se **derivada da função f no ponto de abcissa a** (representa-se por $f'(a)$) ao limite, caso exista,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nota: A expressão $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ também pode ser usada para definir derivada da função f no ponto a . Para verificar a equivalência basta fazer $x - a = h$ e efectuar os cálculos.

Nota: Se $f'(a)$ existe, diz-se que f é **derivável em a** ou que f **tem derivada em a** .

Definição:

Seja f uma f. r. v. r.. Chama-se **derivada à esquerda da função f no ponto de abcissa a** (representa-se por $f'(a^-)$) ao limite, caso exista,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Definição:

Seja f uma f. r. v. r.. Chama-se **derivada à direita da função f no ponto de abcissa a** (representa-se por $f'(a^+)$) ao limite, caso exista,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Teorema:

Uma função f tem derivada no ponto a sse existem e são iguais as derivadas laterais nesse ponto. O valor comum dessas derivadas é a derivada da função no ponto.

Definição:

Uma f. r. v. r. diz-se **derivável num intervalo** $]b, c[$ se é derivável em todos os pontos do intervalo.

Definição:

Uma f. r. v. r. diz-se **derivável num intervalo** $[b, c]$ se é derivável em todos os pontos do intervalo aberto e derivável à direita de b e à esquerda de c .

De modo idêntico define-se função **derivável** em intervalos do tipo $]b, +\infty [$; $]-\infty, c [$; $[b, c [$; $]b, c]$; $[b, +\infty [$ ou $]-\infty, c]$.

Definição:

Uma f. r. v. r. diz-se **derivável** se é derivável em todos os pontos do seu domínio.

Definição:

Seja f uma f. r. v. r.. Chama-se **função derivada de f** (representa-se por f') à função de x , definida para todos os pontos onde existe derivada finita, tal que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Nota: Para além da notação $f'(x)$ poderão surgir outras notações.

Por exemplo:

$$\frac{d(f(x))}{dx} ; Df(x) ; \frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad y'.$$

Exemplos:

Calcule, usando a definição, a função derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = a$, a constante ; **b)** $f(x) = x$; **c)** $f(x) = x^n$;

d) $f(x) = \sqrt{x}$; **e)** $f(x) = \text{sen } x$; **f)** $f(x) = \text{cos } x$.

Derivabilidade e continuidade

Teorema:

Toda a função que admite derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

Exemplo:

Seja $f(x) = |x+1|$. Estude a função quanto à continuidade e diferenciabilidade no ponto de abscissa -1 .

OBSERVAÇÃO: O recíproco deste teorema é FALSO.

Regras de derivação

Teorema:

A derivada de uma constante é igual a zero.

Teorema:

A derivada da função identidade é igual a um.

Teorema:

Sejam f e g duas f. r. v. r. que admitem derivada no respectivo domínio, então:

$$1. [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$2. [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x);$$

$$3. \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Teorema:

Sejam f e g duas f. r. v. r. que admitem derivadas nos respectivos domínios. A derivada da função composta $h(x) = (f \circ g)(x)$ é dada por:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Teorema:

Se f tiver derivada no seu domínio, então $\left([f(x)]^n\right)' = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$, n inteiro positivo.

Observação: Esta regra é ainda válida para potências de expoente racional.

Exemplos:

Calcule : **a)** $\left[\sin^3(x)\right]'$; **b)** $\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]'$.

Teorema:

Se f é uma f. r. v. r. invertível, com derivada finita e não nula no seu domínio, então a sua inversa é também derivável com derivada dada por:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)}, \text{ com } y = f(x).$$

Exemplos:

Calcule as derivadas das seguintes funções:

- a)** $\arcsen(x)$; **b)** $\arccos(x)$;
c) $\arctan(x)$; **d)** $\text{arc cotg}(x)$.

Derivada da função implícita

Na função implícita a variável y é definida como uma função de x , por meio de uma equação que envolve as duas variáveis:

$$F(x, y) = 0.$$

Diz-se que a equação indicada define y como função implícita de x .

Exemplos:

a) $xy = 1$; **b)** $x^2 + y^2 = 1$.

A técnica de derivação da função implícita consiste em derivar ambos os membros da equação em ordem a x , considerando sempre y como uma função de x .

Exemplos:

a) Derivar $x^2 y^3$, supondo $y = f(x)$.

b) Determinar o coeficiente angular da tangente ao gráfico de $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$, no ponto $\mathbf{P(1,-2)}$.

Nota:

Supõe-se que a equação define implicitamente uma função diferenciável f , tal que $y = f(x)$.

Derivada de funções definidas de forma paramétrica

Consideremos uma função definida pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} .$$

Supondo que ϕ e ψ são deriváveis e que $x = \phi(t)$ admite inversa $t = \phi(x)$, igualmente derivável, podemos considerar $y = f(x)$, como a composta de $y = \psi(t)$ com $t = \phi(x)$.

Usando a regra de derivação da função composta:

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(t) \phi'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{ou seja} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

Exemplo:

Calcular a derivada da função $y = f(x)$ definida pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \operatorname{sen} \theta \end{cases} , \text{ com } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Nota: Estas equações definem uma circunferência de raio r e centro em (a, b) .

Derivadas sucessivas

Seja f uma função que admite derivada de primeira ordem. Esta derivada conduz a uma nova função: f' .

Se, por sua vez, esta nova função admite derivada, obtemos uma derivada de segunda ordem que se representa por f'' .

Da mesma forma a terceira derivada, se existir, representa-se por f''' e assim sucessivamente.

(...)

Após n derivações sucessivas (n inteiro positivo) obtém-se a derivada de ordem n de f que se representa por $f^{(n)}$.

Podemos usar as seguintes notações:

• $f'(x)$; $\frac{d(f(x))}{dx}$; $Df(x)$; $\frac{dy}{dx}$; ou y' , para a primeira derivada;

• $f''(x)$; $\frac{d^2(f(x))}{dx^2}$; $D^2 f(x)$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ou y'' , para a segunda derivada;

(...)

• $f^{(n)}(x)$; $\frac{d^n(f(x))}{dx^n}$; $D^n f(x)$; $\frac{d^n y}{dx^n}$ ou $y^{(n)}$, para a n -ésima derivada.

Exemplos:

a) Calcular a segunda derivada da função paramétrica atrás definida .

b) Determinar uma expressão geral para a n -ésima derivada da função $\log(x)$.